Chapitre 3

Lois continues

Une variable aléatoire continue X est une variable dont les valeurs sont un intervalle de nombres réels—le poids d'une pomme, la hauteur d'un arbre, la température d'une soupe. La distribution d'une variable continue ne peut pas s'exprimer par une fonction de probabilité $p(x) = P(X = x)$ car pour tout x, $p(x) = 0$. Elle s'exprime plutôt par une fonction de *densité* et une fonction de *répartition*.

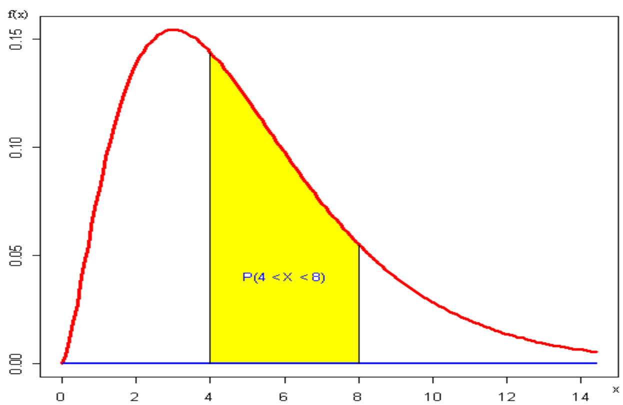
3.1 Fonctions densité et de répartition

La fonction de densité f d'une variable aléatoire continue X est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout a et tout b tels que $a < b$,

$$P(X \in (a\,;b]) = P(a < X \le b) = \int_a^b f(t)dt \tag{3.1.1}$$

Figure 3.1.1

Fonction de densité



Une fonction de densité f doit satisfaire les conditions suivantes :

1. $f(x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (sinon, l'intégrale risquerait d'être négative) ;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (la probabilité que X se trouve entre $-\infty$ et ∞ doit être égale à 1).

Fonction de répartition

La *fonction de répartition* $F : \mathbb{R} \to [0\,;\,1]$, est définie, dans le cas continu (comme dans le cas discret), par

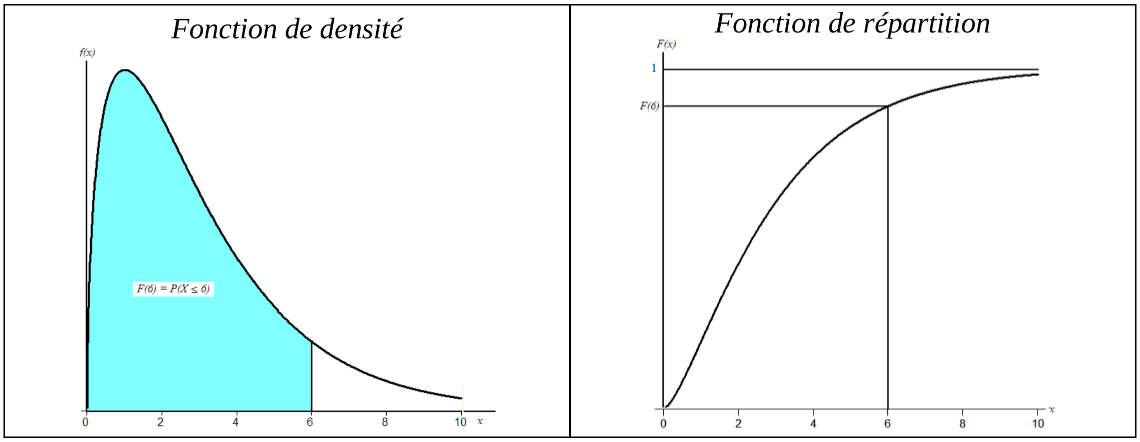
$$F(x) = P(X \le x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent,

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$$

Dans le cas continu on obtient cette probabilité par l'intégration de la fonction de densité :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3.1.2}$$



Du fait que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, on a que f est la dérivée de F :

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) \tag{3.1.3}$$

Si X est votre temps d'arrêt au prochain feu rouge, comment trouver la fonction f qui vous permettra de calculer la probabilité d'attendre, disons, plus de 12 secondes ? Comment trouver la fonction de densité de Y, le poids de votre prochaine nièce à sa naissance ? Ou la fonction de densité des poids $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des pommes cueillies dans un verger?

La chose n'est pas toujours facile. Parfois, la loi découle de certaines hypothèses concernant le contexte. Dans la plupart des situations on recourra à des lois connues qui, tout comme dans le cas discret, dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Certaines caractéristiques du contexte expérimental peuvent guider le choix du modèle. Nous présentons dans ce chapitre la *loi uniforme*, la *loi exponentielle*, la *loi normale*, la loi *Gamma* et la loi *khi-deux*.

3.2 Loi uniforme

Soit X votre temps d'attente lorsque vous arrivez à une station de métro à une heure tout à fait aléatoire. Sachant qu'un métro passe régulièrement à chaque 10 minutes, quelle est la fonction de densité de X ? L'ensemble des valeurs possibles de X est l'intervalle (0 ; 10). Aucun point dans cet intervalle n'est plus probable qu'un autre. On exprime ce fait par une fonction de densité f qui prend la même valeur partout sur (0 ; 10). Par ailleurs, pour toute valeur x à l'extérieur de l'intervalle, on aura $f(x) = 0$. Quelle doit être la valeur de f dans (0 ; 10) ? Puisque la surface sous la courbe doit être égale à 1, il faudra que $f(x) = 1/10$ sur (0 ; 10). La figure 3.2 présente le graphique de la fonction de densité.

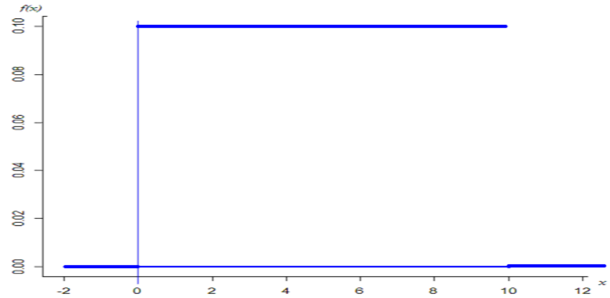
Définition *Loi uniforme* $\mathcal{U}(\alpha\,;\beta)$

Une variable aléatoire X est de loi uniforme sur l'intervalle $(\alpha\,;\beta)$ [$X \sim \mathcal{U}(\alpha\,;\beta)$] si sa fonction de densité est donnée par

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha < x \le \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Figure 3.2

Densité uniforme sur (0 ; 10)



Théorème 3.2.1 *Fonction de répartition et propriétés d'une loi* $\mathcal{U}(\alpha ; \beta)$

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\alpha ; \beta)$. Alors

a) La fonction de répartition de X est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \le x \le \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

b) L'espérance et la variance sont données par

$$\mathrm{E}(X) = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{et } \mathrm{Var}(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12} \qquad (3.2.3)$$

3.3 Loi exponentielle

La loi exponentielle sert à modéliser des temps d'attente ou des durées de vie : le temps d'attente entre deux arrivées à un comptoir de service, ou la durée de vie d'une pièce électronique.

Définition *Loi exponentielle* $\mathcal{E}(\beta)$

Une variable aléatoire X est distribuée selon une loi exponentielle de moyenne β, notée $\mathcal{E}(\beta)$, si elle a pour densité la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

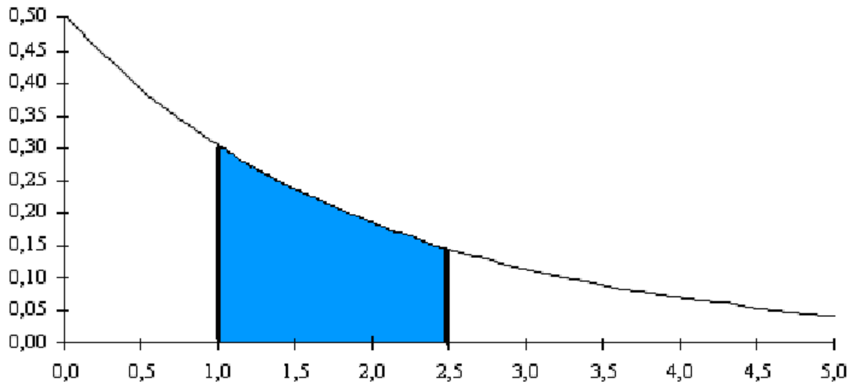
Les probabilités sont données par les surfaces sous la courbe. Considérons la probabilité

$$\mathrm{P}(1{,}0 < X \le 2{,}5)$$

lorsque X est de loi $\mathcal{E}(2)$. La surface à considérer est indiquée à la figure ci-dessous.

Figure 3.3.1

P(1,0 < $X \le$ 2,5) *pour une variable de loi* $\mathcal{E}(2)$



La surface entre 1,0 et 2,5 est donnée par $F(2{,}5) - F(1{,}0)$. Il se trouve que dans le cas d'une variable de loi $\mathcal{E}(\beta)$, il existe une expression de la fonction de répartition $F(x)$:

Théorème 3.3.1 Soit $X \sim \mathcal{E}(\beta)$. Alors

a) La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

b) L'espérance et la variance de X sont données par

$$\mathrm{E}(X) = \beta \;;\; \mathrm{Var}(X) = \beta^2. \quad (3.3.3)$$

c) $$\mathrm{P}(a \le X \le b) = e^{-a/\beta} - e^{-b/\beta}. \quad (3.3.4)$$

Le paramètre β est la moyenne de X et c'est aussi son écart-type.

Exemple 3.3.1 *Loi exponentielle*

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(2)$. Déterminer P(1,0 < $X \le$ 2,5).

Solution P(1,0 $\le X \le$ 2,5) = $e^{-1{,}0/2} - e^{-2{,}5/2}$ = 0,6065 – 0,2865 = 0,3200.

Exemple 3.3.2 *Loi exponentielle*

Supposons que la durée de vie d'une pièce électronique est une variable X de loi exponentielle. Si ces pièces ont une durée moyenne de 18 mois, quelle est la probabilité qu'une pièce donnée dure plus de 2 ans ?

Solution Si la durée X est exprimée en nombre d'années, on a β = 1,5 années, puisque $\beta = \mathrm{E}(X)$ = la durée moyenne des pièces. On a alors

$$\mathrm{P}(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-2/\beta}) = e^{-2/1{,}5} = 0{,}2636.$$

Exemple 3.3.3 *Absence de mémoire*

Dans le dernier exemple, on a montré que la probabilité qu'une pièce neuve dure plus de 2 ans est 0,2636. Nous montrons maintenant que cette probabilité est indépendante de l'âge de la pièce. Plus précisément, calculons la probabilité qu'une pièce produite il y a un an dure plus de 2 ans encore.

Solution Soit X la durée de la pièce. Nous devons calculer la probabilité conditionnelle P(B|A), où B est l'événement « la pièce dure plus de 2 ans encore », soit $\{X \geq 3\}$; et A est l'événement « la pièce a duré au moins un an », soit $\{X \geq 1\}$. Alors $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = P(X \geq 3)/P(X \geq 1) = e^{-3/1,5}/e^{-1/1,5} = e^{-2/1,5} = 0,2636$.

Cette « absence de mémoire » est une des caractéristiques du modèle exponentiel.

Lien avec la loi de Poisson

Là où il y a une loi de Poisson, il y a une loi exponentielle. Supposons qu'on observe les arrivées à un comptoir de service. On peut noter plusieurs choses, entre autres, le nombre Y d'arrivées à dans un intervalle de temps. Y est de loi de Poisson. Mais on peut aussi noter le *temps d'attente* X avant la première arrivée, ou encore le temps d'attente entre deux arrivées successives. X, une variable continue, suit une loi exponentielle. Voici pourquoi.

Supposons donc que Y, le nombre d'arrivées dans un intervalle de temps $(0 ; x)$, est de loi de Poisson de paramètre $\lambda = \gamma x$. Alors

$$P(Y = y) = (\gamma x)^y e^{-\gamma x}/y!$$

Soit X est la durée de temps entre deux réalisations. La fonction de répartition de X est $F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$. Or $P(X > x)$ est la probabilité qu'il n'y ait aucune arrivée dans l'intervalle $(0 ; x)$. Donc

$$P(X > x) = P[\text{aucune arrivée dans } (0, x)] = P(Y = 0) = (\gamma x)^0 e^{-\gamma x}/0! = e^{-\gamma x}.$$

Ainsi, $F_X(x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\gamma x}$.

On reconnaît cette expression comme la fonction de répartition d'une variable de loi exponentielle de paramètre $\beta = 1/\gamma$.

Exemple 3.3.4 *Loi exponentielle issue d'une variable de loi de Poisson*

Supposons qu'à une certaine intersection, il arrive en moyenne deux accidents en une semaine de 5 jours. En supposant que le nombre d'accidents dans un intervalle de temps suit une loi de Poisson, calculer la probabilité a) que le premier accident de la semaine n'ait pas lieu avant la fin du 3e jour ; b) que le premier accident ait lieu au courant de la 4e journée ?

Solution Le nombre moyen d'accidents en $t = 5$ jours est $\lambda = 2$ (γ, le nombre moyen d'accidents par jour, est égal à $2/5 = 0,4$) ; donc le temps d'attente moyen entre deux accidents est $\beta = t/\lambda = 5/2 = 2,5$ jours. Si X est la durée de temps qui s'écoule entre le début de la semaine et le premier accident, alors $X \sim \mathcal{E}(2,5)$.

a) $P(X \geq 3) = e^{-3/2,5} = e^{-1,2} = 0,3012$. On pourrait également résoudre ce problème en invoquant la loi de Poisson. Si Y est le nombre d'accidents en 3 jours, la probabilité demandée est $P(Y = 0)$. Or $Y \sim \mathcal{P}(\gamma \times 3) = \mathcal{P}(1,2)$ et $P(Y = 0) = e^{-1,2}$.

b) $P(3 < X < 4) = e^{-3/2,5} - e^{-4/2,5} = 0,3012 - 0,2019 = 0,0993$.

3.4 Loi normale

La loi normale est l'une des lois les plus fondamentales de la statistique. Non seulement permet-elle de modéliser des variables observées couramment dans le quotidien et dans les sciences, telles la taille et parfois le poids d'individus, mais elle joue un rôle capital au niveau de l'inférence statistique. Une définition, en termes de la fonction de densité, suit

Définition **:** *Loi normale* $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$

Une variable aléatoire X est distribuée selon une loi normale de paramètres μ et σ^2, désignée par $X \sim \mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, si elle a pour densité la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x-\mu)^2/\sigma^2} \quad , -\infty < x < \infty \qquad (3.4.1)$$

Les paramètres μ et σ désignent l'espérance et l'écart-type, respectivement. La courbe est symétrique par rapport à sa moyenne μ. Elle présente des points d'inflexion de part et d'autre de celle-ci, à une distance d'un écart-type.

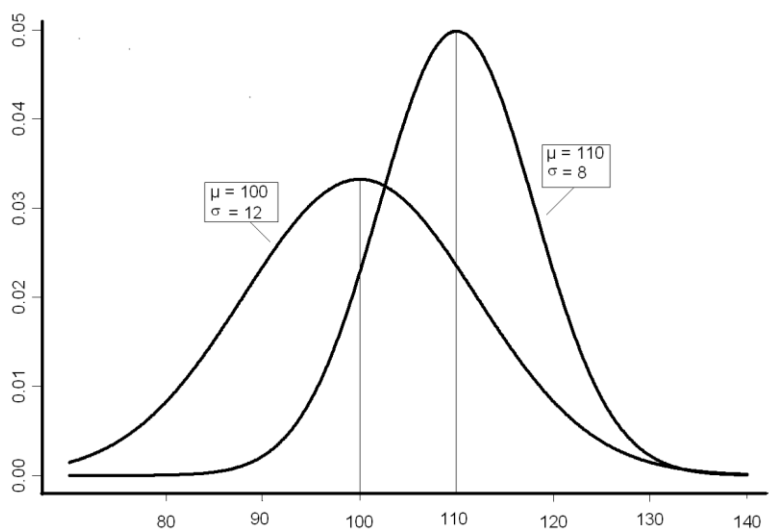
Théorème 3.4.1 *Espérance et variance d'une* $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, *alors*

$$\mathrm{E}(X) = \mu \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \sigma^2. \qquad (3.4.2)$$

Figure 3.4.1

Deux lois normales : $\mathcal{N}(100\ ;\ 144)$ et $\mathcal{N}(110\ ;\ 64)$



Calculs d'aires

Nous discuterons plus bas la question de savoir dans quelles conditions une variable suit une loi normale. Pour l'instant, considérons une variable X dont on sait qu'elle est de loi normale, que sa moyenne est μ et sa variance σ^2, et supposons qu'on veuille calculer la probabilité $P(a < X \le b)$, où a et b sont deux constantes, $a < b$. Si F est la fonction de répartition d'une variable de loi $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$. Or la primitive $F(x)$ d'une variable de loi normale ne possède pas d'expression explicite. Aussi faut-il recourir à des algorithmes numériques complexes pour l'évaluer. Aujourd'hui, ces calculs ne posent pas de problème car plusieurs logiciels et certaines calculatrices peuvent les effectuer en une fraction de seconde. Malheureusement, ces procédures ne sont pas implantées dans toutes les calculatrices. En attendant qu'elles le soient (ou qu'un ordinateur portable soit à la portée de tous), nous devrons nous référer à des tables qui publient les résultats de ces calculs. La plupart des tables publiées, dont une version est présentée en annexe, se concentrent sur une loi normale particulière, la courbe $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, la normale de moyenne 0 et de variance (ou écart-type) 1, appelée ***normale centrée-réduite***. On désigne habituellement la fonction de répartition d'une variable Z normale centrée-réduite par Φ :

$$\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) \text{ lorsque } Z \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1) \qquad (3.4.3)$$

La table en annexe donne les valeurs de $\Phi(z)$ pour diverses valeurs z.

Exemple 3.4.1 *Calcul des probabilités pour une normale centrée-réduite.*

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Calculer

a) $\mathrm{P}(Z > 1{,}25)$; b) $\mathrm{P}(Z \leq -1)$; c) $\mathrm{P}(1{,}15 < Z \leq 2{,}11)$;

d) $\mathrm{P}(0 < Z \leq 1)$; e) $\mathrm{P}(-2 < Z \leq 1)$,

Solution

a) $\mathrm{P}(Z > 1{,}25) = 0{,}1056$;

b) $\mathrm{P}(Z \leq -1) = \mathrm{P}(Z \geq 1) = 0{,}1587$;

c) $\mathrm{P}(1{,}15 < Z \leq 2{,}11) = \mathrm{P}(Z > 1{,}15) - \mathrm{P}(Z > 2{,}11) = 0{,}1251 - 0{,}0174 = 0{,}1077$;

d) $\mathrm{P}(0 < Z \leq 1) = \mathrm{P}(Z>0) - \mathrm{P}(Z>1) = 0{,}5 - 0{,}1587 = 0{,}3413$;

e) $\mathrm{P}(-2 < Z \leq 1) = \mathrm{P}(Z > -2) - \mathrm{P}(Z > 1) = (1-0{,}0228) - 0{,}1587 = 0{,}8185$.

Pour des variables normales de moyenne et variance quelconques, il faut pouvoir « ramener » une normale arbitraire $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ à une $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$. Le théorème qui nous permet de le faire affirme que toute fonction affine d'une variable normale est normale.

Théorème 3.4.2 *Toute fonction affine d'une variable normale est normale.*

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\ \sigma^2)$ et $Y = a + bX$ alors $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu\ ;\ b^2\sigma^2)$

C'est le cas particulier suivant qui explique pourquoi il est possible de se limiter à une seule table.

Corollaire Si $X : \mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$, alors

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$$

C'est la possibilité de transformer une variable $\mathcal{N}(\mu\ ;\ \sigma^2)$ en une variable centrée-réduite qui nous permet d'utiliser des tables pour calculer des surfaces sous une courbe normale quelconque, car

$$P[a < X \leq b] = P\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right], \text{ où } Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$$

Exemple 3.4.2 *Calcul des probabilités pour une normale quelconque*

Supposons que les montants correspondant à une population de factures sont de moyenne $\mu = 200$ \$ et d'écart-type $\sigma = 80$ \$. En supposant que les montants des factures sont de loi normale, déterminer la probabilité qu'une facture tirée au hasard corresponde à un montant compris entre 40 \$ et 280 \$.

Solution Si X est le montant de la facture, nous voulons calculer P(40 < X ≤ 280). Nous transformons $X \to Z = (X - 200)/80$. Alors P(40 < X ≤ 280)) = $P\left(\frac{40-200}{80} \le \frac{X-200}{80} \le \frac{280-200}{80}\right)$ =

$P(-2 \le Z \le 1) =$ 0,8185.

3.5 Variables normales indépendantes

Une propriété importante de la loi normale est le fait qu'une somme ou une moyenne de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi normale, est normale. Voici l'énoncé formel :

Propriété *Somme de variables normales indépendantes*

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires *indépendantes* de loi normale, alors

leur somme $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et leur moyenne $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ sont de loi normale.

Nous savons, par ailleurs, que l'espérance de Y est égale à la somme des espérances et (étant donné l'indépendance des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$) la variance de Y est égale à la somme des variances :

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \tag{3.4.4}$$

Par conséquent

$$\mathrm{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i); \quad \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \tag{3.4.5}$$

Nous nous intéresserons particulièrement au cas où les moyennes sont toutes égales et les variances aussi. Nous avons alors le corollaire suivant :

Propriété *Somme de variables normales indépendantes de loi normale identique*

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale de moyenne μ et de variance σ². Alors leur somme et leur moyenne sont de loi normale:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu\,;\, n\sigma^2) \quad \text{et} \quad \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Exemple 3.5.1 *Distribution de la moyenne d'un échantillon*

On prélève un échantillon de $n = 15$ factures d'une très grande population de moyenne μ = 300 $ et d'écart-type σ = 60 $. On suppose que la population est normale.

a) Quelle est la probabilité que la valeur moyenne de l'échantillon soit comprise entre 290 $ et 310 $ (en d'autres termes, que la moyenne de l'échantillon se situe à 10 $ ou moins de la moyenne de la population) ?

b) Quelle est la probabilité que la valeur totale des 15 factures soit inférieure à 4549 $?

Solution

a) Supposer que la population est très grande et qu'elle est normale, c'est dire que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{15}$ sont indépendantes et de loi normale. Leur moyenne est donc d'espérance μ = 300 et d'écart-type $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{60}{\sqrt{15}}$ = 15,49.

Alors $P(290 \le \overline{X} \le 310) = P\left(\frac{290-300}{15,49} \le Z \le \frac{310-300}{15,49}\right) = P(-0,65 \le Z \le 0,65) = 0,4844$.

b) La valeur totale T des 15 factures est normale de moyenne $n\mu = 4500$ et de variance $n\sigma^2 = 54\,000$.

Alors $P(T \le 4549) = P\left(Z \le \frac{4549-4500}{\sqrt{54000}}\right) = P(Z \le 0,21) = 0,5835$.

Les propriétés énoncées ci-dessus (normalité d'une somme et d'une moyenne) découlent d'un théorème plus général que voici :

Théorème 3.5.1 *Combinaison linéaire de variables normales indépendantes*

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, où $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i ; \sigma_i^2)$,

$i = 1, \ldots, n$, et $a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes. Alors

$$X = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i ; \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

Exemple 3.5.2 *Distribution de moyennes, de sommes et de différences*

Considérons deux très grandes populations de mangues de deux variétés différentes. Supposons que leur poids est de loi normale dont les paramètres sont les suivants :

Variété	Moyenne	Écart-type
Julie	$\mu_1 = 352$ g	$\sigma_1 = 40$ g
Amélie	$\mu_2 = 370$ g	$\sigma_2 = 35$ g

Dans les solutions qui suivent, nous supposons que les tirages de mangues dans les populations sont indépendants, ce qui est justifié lorsqu'il s'agit de grandes populations. On désignera par Z toute variable normale centrée-réduite.

a) Quelle est la probabilité que le poids total d'une douzaine de mangues « Julie » soit inférieure à 4357 g ?

b) Quelle est la probabilité que le poids *moyen* des mangues dans un sac de 16 mangues « Julie » soit inférieur à 364,5 g ?

c) Si on tire deux « Julie » au hasard, quelle est la probabilité que la première pèse plus de 100 g de plus que la deuxième ?

d) Quelle est la probabilité que la différence de poids entre deux mangues « Julie » soit supérieure à 120g ?

e) Quelle est la probabilité que le poids total de 5 « Julie » soit supérieur au poids total de 4 « Amélie » ?

Réponses

a) Le poids total de 12 mangues est une somme, $Y = X_1 + \ldots + X_{12}$, de 12 variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(352 ; 40^2)$. Donc $Y \sim \mathcal{N}[12(352) ; 12(40^2)]$. $P(Y < 4357) = P(Z < 0,96) = 0,8315$.

b) Le poids moyen est $\overline{X} = (X_1 + \ldots + X_{16})/16$.

$\overline{X} \sim \mathcal{N}[352 ; 40^2/16]$ et $P(\overline{X} \le 364,5) = P(Z < 1,25) = 0,8944$.

c) Soit X_1 le poids de la première mangue et X_2 le poids de la deuxième.

Nous cherchons $P(Y > 100)$ où $Y = X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}[0 ; 40^2 + 40^2]$.

Donc $P(Y > 100) = P(Z > 1,77) = 0,0384$.

d) Soit X_1 le poids de la première mangue et X_2 le poids de la deuxième. Nous cherchons P($|Y| > 120$) où $Y = X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}[0\,;\,40^2 + 40^2]$. P($|Y| > 120$) = 2 P($Y > 120$) = 2P($Z > 2{,}12$) = 0,0338.

e) Soit $X_1 + \ldots + X_5$ le poids total des 5 « Julie », $Y_1 + \ldots + Y_4$ celui des 4 « Amélie », et

$W = (X_1 + \ldots + X_5) - (Y_1 + \ldots + Y_4)$.

$W \sim \mathcal{N}[5(352) - 4(370)\,;\,5(40^2) + 4(35)^2]$.

La probabilité demandée est P($W > 0$) = P($Z > -3{,}26$) = 0,9994.

3.6 Théorème limite central

Le théorème invoqué à l'exemple 3.5.1, selon lequel la moyenne $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ d'un échantillon est de loi normale, a une portée limitée du fait qu'il suppose la normalité des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Or en pratique, cette hypothèse est rarement vérifiée. Ce qu'elle signifie, dans l'exemple 3.5.1, où l'on parle des montants d'une population de factures, c'est que l'histogramme des montants des factures de la population entière a la forme en cloche d'une loi normale. C'est rarement le cas pour des données financières, dont les distributions sont généralement fortement asymétriques : des petits montants très nombreux, et un nombre décroissant de montants de plus en plus élevés.

Il se trouve, heureusement, que la solution proposée à l'exemple 3.5.1 est néanmoins adéquate, dans le sens que la réponse obtenue ne s'éloigne probablement pas trop de la réponse exacte. Ce qui justifie cette conclusion, c'est un remarquable théorème appelé *théorème limite central*, qui dit à peu près ceci : la variable $\bar{X}$ est à peu près de loi normale, même si la population n'est pas normale. La seule condition exigée est que n soit assez grand. Voici l'énoncé :

Théorème 3.6.1 *Théorème limite central*
Soit $X_1, X_2, \ldots$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de moyenne μ et de variance σ^2. Alors la variable $Z_{\bar{X}} = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ tend en loi vers une loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

En pratique, cela signifie que si n est assez grand, on peut supposer que

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2_{\bar{X}}) \text{ où } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3.6.1}$$

(ou que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu\,;\,\sigma^2_T)$, $\sigma^2_T = n\sigma^2$).

On ne peut pas être définitif ni très précis quant à ce qu'on entend par « n grand ». En pratique on se donne comme limite le nombre 30 : si $n \geq 30$, on dit que n est « grand », ce qui permet de supposer que $\bar{X}$ est approximativement de loi $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2/n)$ (et donc que $Z_{\bar{X}} \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$). Mais il est évident que l'approximation ne sera pas toujours bonne pour $n \geq 30$, ni nécessairement mauvaise pour $n < 30$. D'abord, nous n'avons pas de critère de « qualité » pour une approximation. Est-elle bonne à $n = 30$? Avant de répondre, il faut préciser ce qu'on entend par « bonne ». Cette notion est forcément relative : l'approximation est meilleure avec $n = 300$ qu'avec $n = 30$. Pour une taille donnée, disons $n = 30$, la qualité de l'approximation dépend de plusieurs facteurs, le principal étant la normalité ou non-normalité des variables X_i elles-mêmes. Si les X_i sont déjà « presque » normales, l'approximation de la distribution de $\bar{X}$ par une $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2/n)$ est adéquate même lorsque n est inférieur à 30. Inversement, si les X_i sont très loin d'être normales (par exemple, exponentielles ou autrement asymétriques), alors même avec n bien supérieur à 30 la distribution de $\bar{X}$ n'approchera pas une $N(\mu\ ;\ \sigma^2/n)$.

Remarque *Le théorème limite central est l'une des raisons pour lesquelles la loi normale est utilisée si fréquemment comme modèle : on a souvent affaire à des sommes ou des moyennes. Mais il arrive aussi de supposer une loi normale pour des observations faites directement dans la nature, comme, par exemple, la taille X d'une personne : Qu'est-ce qui nous fait dire que X est normale ? Une certaine supposition — dans la mesure où elle semble crédible — permet d'espérer qu'elle le soit, du moins à peu près. C'est la supposition que X est en fait une somme de variables aléatoires, même si nous ne les avons pas nous-mêmes observées et sommées. Concrètement, c'est dire que la taille X est l'effet d'une multitude de facteurs, génétiques et environnementaux, des facteurs additifs dont aucun ne prédomine (ceci découle d'une interprétation qu'on peut donner à un certain théorème central limite, plus général que celui que nous avons énoncé ici). C'est le cas des tailles dans une population relativement homogène, comme on l'a souvent observé dans des études empiriques. Une population hétérogène — par exemple, les tailles des membres d'une population composée, en parts égales d'adultes et d'enfants—, ne présenterait pas une loi normale. Dans une moindre mesure, la normalité est altérée si la population est constituée d'hommes et de femmes. Contrairement à la distribution des tailles d'un groupe de femmes* (*figure* 3.6.1-a))*, celle d'un groupe mixte est légèrement bimodale* (*figure* 3.6.1-b)).

En général, la décision d'adopter tel modèle plutôt que tel autre est basée sur un mélange de considérations théoriques et d'observations. Mais le test ultime, c'est l'observation. On compare — graphiquement d'abord, au moyen d'un histogramme—l'échantillon à la fonction de densité du modèle. Par exemple, si la loi considérée comme modèle est normale, on comparera les données de l'échantillon à une loi normale de même moyenne et même variance que l'échantillon. Parfois cette approche graphique suffit pour rejeter d'emblée un modèle. Autrement, on procède à une analyse plus rigoureuse. On n'a jamais vraiment la preuve *qu'un modèle est bon, mais tant qu'il n'est pas contredit par l'observation et tant qu'il n'y en a pas de meilleur on le retient et on l'utilise. La figure* 3.6.2 *illustre l'approche graphique. Il est vrai qu'on a de bonnes raisons de croire a priori que le poids d'un nouveau-né est une variable normale. À l'œil, la distribution observée des poids d'un grand groupe de nouveau-nés* (*figure* 3.6.2-a) *semble le confirmer. On la compare à la distribution normale de même moyenne et même variance* (*figure* 3.6.2-b). *En tout cas, il est évident que la loi exponentielle est mal ajustée aux données* (*figure* 3.6.2-c). *Mais la loi normale est-elle la seule qui s'ajuste bien ? Visiblement non, puisque la loi gamma* (*figure* 3.6.2-d) *est elle aussi bien ajustée. Le choix n'est pas évident dans le graphique. Une analyse plus rigoureuse aboutirait à un choix — mais quel que soit le choix proposé par les techniques formelles, il n'est pas exclu qu'on décide quand même d'utiliser la loi normale, d'abord parce qu'elle est plus commode, ensuite parce qu'elle est plus crédible a priori.*

Figure 3.6.1

Distribution des tailles – échantillon homogène et échantillon hétérogène

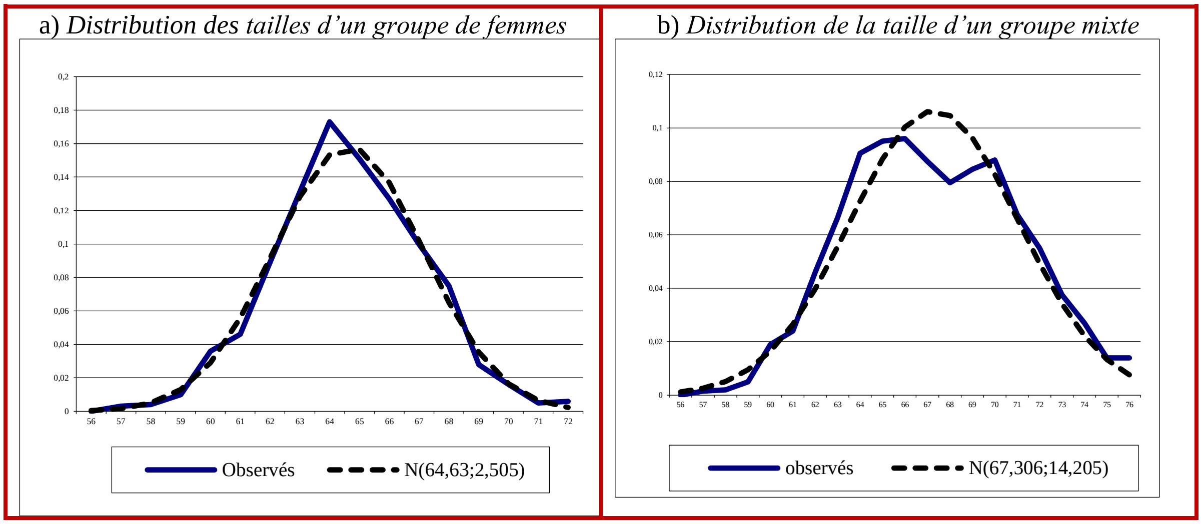
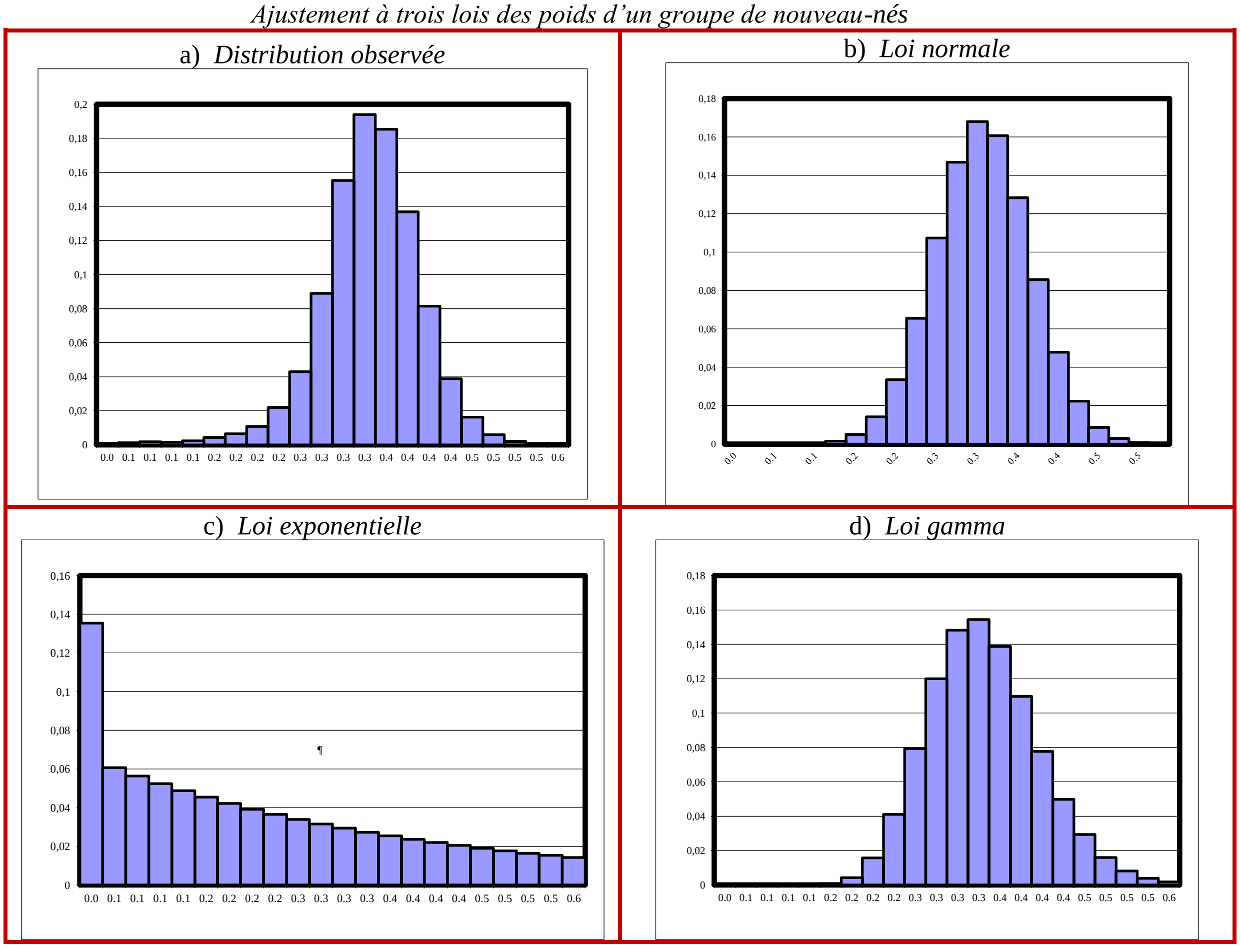


Figure 3.6.2

Ajustement à trois lois des poids d'un groupe de nouveau-nés



3.7 Approximation normale de la loi binomiale

Une variable de loi binomiale peut être approchée par une variable de loi normale lorsque n est grand. Ceci est une application immédiate du théorème limite central, puisqu'une variable binomiale peut être considérée comme une somme $X = \sum_i X_i$, où X_i est le nombre de succès au i^e essai. Les variables X_i prennent donc la valeur 1 ou 0 avec probabilité p et $q = 1-p$, respectivement. Elles sont indépendantes puisque les épreuves sont indépendantes, leur moyenne μ et variance σ^2 sont données par $\mu = E(X_i) = p$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_i) = pq$. La variable X peut donc être approchée par une $\mathcal{N}(np\ ;\ npq)$. En plus d'exiger que n soit grand il faut que p ne soit ni trop grand ni trop petit car dans ces cas la loi binomiale est fortement asymétrique. En général, plus p est proche des extrémités 0 ou de 1, plus il faut que n soit grand. Une façon de combiner ces conditions est d'exiger que np et nq ne soient pas trop petits. La formulation suivante résume ces conditions :

Théorème 3.7.1 *Approximation normale de la loi binomiale*

Soit $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)$ et supposons que $n \geq 30$, $np > 5$, et $nq > 5$.

Alors, la variable centrée-réduite $Z = (X - np)/\sqrt{npq}$ suit à peu près une loi $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1) \tag{3.7.1}$$

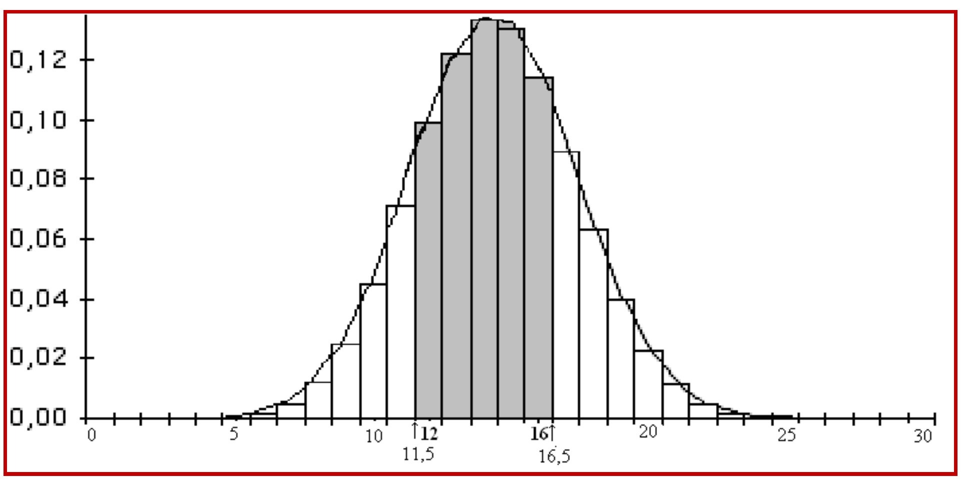
ou encore, que

$$X \sim \mathcal{N}(np\ ;\ npq). \tag{3.7.2}$$

Figure 3.7.1

Distribution d'une $\mathcal{N}(14{,}4\ ;\ 8{,}64)$ *et d'une* $\mathcal{B}(36\ ;\ 0{,}4)$

$P(12 \leq X \leq 16)$



La probabilité d'une valeur donnée x est proportionnelle à la *surface* du rectangle de l'histogramme posé au-dessus de x puisque la base des rectangles est toujours de largeur 1. Cette probabilité peut être approchée par la surface correspondante sous la courbe $\mathcal{N}(np\ ;\ npq)$. Considérons, par exemple, la probabilité P($a \le X \le b$) où a et b sont des entiers. Elle est représentée par la surface combinée des rectangles dont les bases sont centrées aux points a, a+1, ... , b.

Ces rectangles reposent sur l'intervalle [a – 1/2 ; b + 1/2] et c'est sur cet intervalle que nous devons évaluer l'aire sous la courbe $\mathcal{N}(np\ ;\ npq)$ et non sur l'intervalle [a ; b] ; ce dernier intervalle n'englobe qu'une moitié du rectangle posé sur a et une moitié du rectangle posé sur b. L'ajustement aux limites a et b, appelé *correction pour la continuité*, est utile lorsque n est plutôt modeste ; il a peu d'effet lorsque n est grand.

Exemple 3.7.1 *Approximation normale de la loi binomiale*

Soit $X \sim \mathcal{B}(36\ ;\ 0{,}4)$. Calculer par la loi normale *a*) P($12 \le X \le 16$) ; *b*) P($X < 13$) ; *c*) P($X = 10$).

Solution L'espérance de X est $E(X) = np = (36)(0{,}4) = 14{,}4$ et sa variance est $\sigma^2 = npq = 36(0{,}4)(0{,}6) = 8{,}64$. Nous supposons donc que $X \sim \mathcal{N}(14{,}4\ ;\ 8{,}64)$.

a) $P(11{,}5 \le X \le 16{,}5) = P[(11{,}5-14{,}4)/\sqrt{8{,}64} \le Z \le (16{,}5-14{,}4)/\sqrt{8{,}64}\,] = P(-0{,}99 \le Z \le 0{,}71) = 0{,}6000$; ce calcul est illustré à la figure 3.6.1.

b) $P(X < 12{,}5) = P(Z < (12{,}5-14{,}4)/\sqrt{8{,}64}\,) = P(Z<-0{,}65) = 0{,}2578$;

c) $P(9{,}5 < X < 10{,}5) = P(-1{,}67 < Z < -1{,}33) = 0{,}0443$.

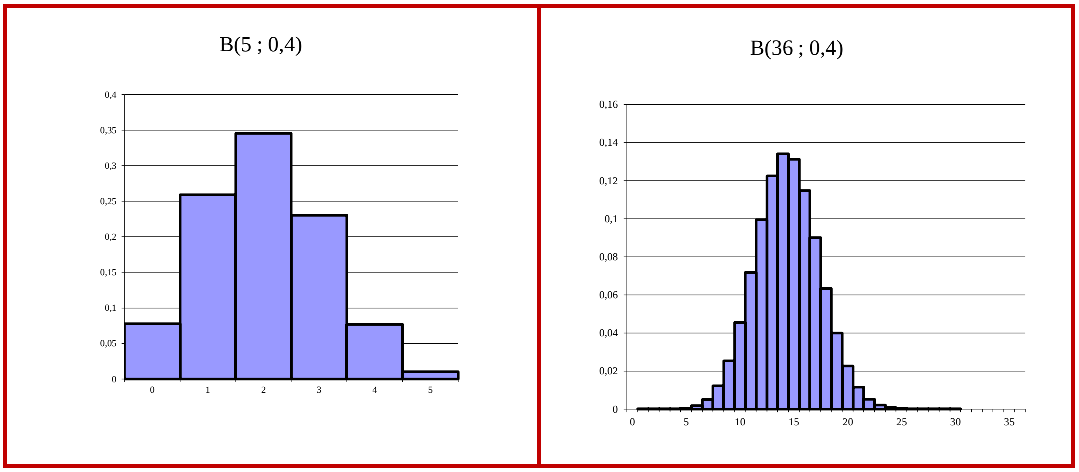
Par la loi binomiale, ces probabilités sont, respectivement, 0,602 ; 0,2615 et 0,04550.

Remarque *Il n'est évidemment pas possible de formuler une consigne catégorique —comme « utiliser l'approximation si n ≥ 30 »— concernant l'utilisation de l'approximation normale. Plusieurs facteurs entrent en ligne de compte, dont l'un certainement est ce qu'on entend par « bonne ». Ce qu'on sait, c'est que l'approximation est d'autant meilleure que n est grand, et d'autant meilleure que p est proche de ½. Ces conditions s'expliquent intuitivement. Lorsque n est grand, les contours de l'histogramme peuvent mieux être approchés par une courbe, comme le montrent les graphiques suivants, qui comparent n = 5 avec n = 36 (et p = 0,4).*

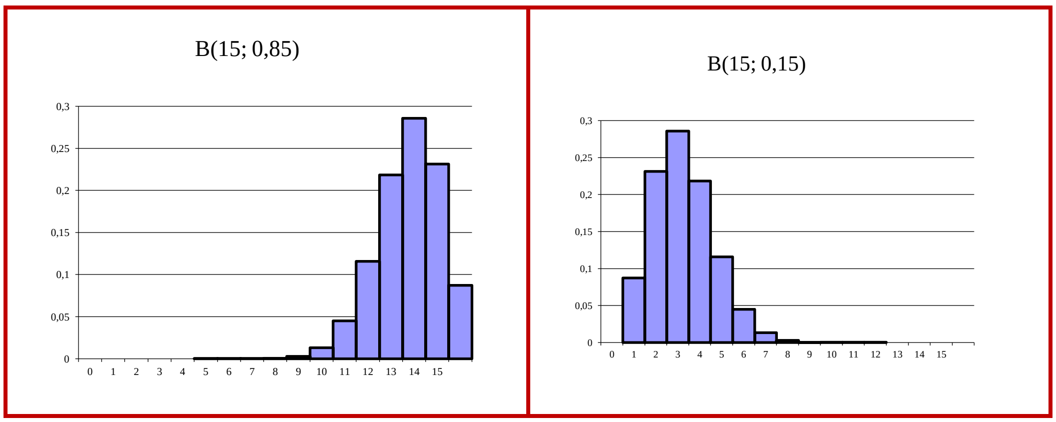
Quelques comparaisons numériques peuvent donner une idée des précisions atteignables. Ces calculs se font aisément avec un logiciel statistique ou avec un tableur comme Excel. Voici, par exemple, une comparaison des calculs exacts et approximatifs de la fonction de répartition $F(x)$ d'une variable de *loi* $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}3)$: $F(x) = P(X \le x)$.

	$F(x) = P(X \le x)$		
x	Probabilité exacte	Probabilité approximative	Pourcentage d'erreur
0	0,0008	0,0036	356,23
1	0,0076	0,0141	84,02
2	0,0355	0,0438	23,54
3	0,1071	0,1113	3,89
8	0,8867	0,8887	0,23
9	0,9520	0,9562	0,43
10	0,9829	0,9859	0,31
11	0,9949	0,9964	0,15
12	0,9987	0,9992	0,05
13	0,9997	0,9999	0,01

Ce qu'on voit clairement, c'est que pour les petites valeurs x les approximations ne sont pas très bonnes, mais qu'elles s'améliorent nettement lorsque x croît.



La valeur de p détermine le degré d'asymétrie. Lorsque p = ½, l'histogramme est symétrique et donc facilement approché par une courbe normale. Les graphiques suivants montrent ce qui se passe lorsque p est très grand ou très petit.



3.8 Loi Gamma et loi khi-deux

La loi khi-deux, qui joue un rôle important en statistique, est un cas particulier d'une loi plus générale appelée *loi Gamma*, qui elle aussi a d'importantes applications. Nous commençons donc par définir la loi *Gamma*. C'est une loi à deux paramètres positifs, α et β, que nous définissons en termes de fonction de densité.

Définition *Loi Gamma* $\mathcal{Gm}(\alpha\,;\beta)$

Une variable X est dite de loi Gamma de paramètres α et β si sa fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \tag{3.8.1}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma, définie pour $\alpha > 0$, par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \,.$$

On désignera la loi gamma de paramètres α et β par $\mathcal{Gm}(\alpha\,;\beta)$

Théorème 3.8.1 *Espérance et variance de la loi Gamma*

$$E(X) = \alpha\beta \text{ et } Var(X) = \alpha\beta^2 \qquad (3.8.2)$$

Le prochain théorème a d'importantes applications. Il est énoncé sans démonstration.

Théorème 3.8.2 *Additivité de la loi Gamma*

Soit $X_1, \ldots, X_n$ *n variables aléatoires indépendantes,* $X_i \sim \mathcal{G}m(\alpha_i\,;\beta)$*. Alors la somme*

$$X = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{G}m(\sum \alpha_i\,;\beta)$$

où $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$, et

$$E(X) = \alpha\beta,\ \ Var(X) = \alpha\beta^2 \qquad (3.8.3)$$

Remarque *La loi exponentielle est une loi* $\mathcal{G}m(1\,;\beta)$

Le rôle de la loi χ^2
La loi khi-deux est une loi *Gamma* avec $\beta = 2$ et $\alpha = \nu/2$, où ν est un entier positif. β étant fixe, le seul paramètre est ν, appelé *nombre de degrés de liberté*.

On écrit $X \sim \chi^2_\nu$ pour signifier que X est de la loi khi-ceux à ν degrés de liberté

Sa fonction de densité est

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0 \qquad (3.8.4)$$

L'espérance et la variance de Y sont : $E(Y) = \nu$ et $Var(Y) = 2\nu$.

Le rôle de la loi χ^2
Nous avons montré qu'une fonction linéaire d'une variable normale est normale. Pour des fonctions non linéaires, il n'existe pas de théorème général; leur loi doit être déterminée au cas par cas. Il y a une fonction non linéaire, cependant, qui, on le verra plus tard, a une importance particulière : le *carré* d'une variable de loi normale centrée réduite est de loi khi-deux à 1 degré de liberté.

Théorème 3.8.3 *Le carré d'une* $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$ *est une* χ^2_1

$$\text{Si } Z \sim \mathcal{N}(0\,;1), \text{ alors } Z^2 \sim \chi^2_1 .$$

En combinant les théorèmes 3.8.2 et 3.8.3, on a ceci :

Théorème 3.8.4 Soit $Z_1, \ldots, Z_n$, n variables aléatoires indépendantes, chacune de loi $\mathcal{N}(0\,;1)$. Alors

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots Z_n^2 \ \sim \chi^2_n .$$

Corollaire 1 Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i\,;\sigma_i^2)$. Alors

$$Q = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n}\right)^2 \sim .\, \chi^2_n$$

Corollaire 2 Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$. Alors

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$$

3.9 Statistiques d'ordre

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire simple d'une population de fonction de densité f et de fonction de répartitions F. Considérons les variables $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ définies par

$X_{(1)}$ = la plus petite des n valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

$X_{(2)}$ = la 2e plus petite des n valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

⋮

$X_{(n)}$ = La plus grande des n valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

En général.

$X_{(r)}$ = La re plus petite des n valeurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $1 \leq r \leq n$.

Exemple 3.9.1 . Soit X_1, X_2, X_3 et X_4 les tailles de 4 personnes tirées successivement d'une grande population (X_1 est la taille de la première personne tiré, X_2 celle de la deuxième, etc.). Supposons que $X_1 = 168$, $X_2 = 179$, $X_3 = 166$ et $X_4 = 173$. Alors $X_{(1)} = 166$; $X_{(2)} = 168$; $X_{(3)} = 173$; $X_{(4)} = 179$.

Nous allons déterminer la fonction de densité de $X_{(r)}$. Avant d'aborder le cas général, nous traitons les cas particuliers—relativement simples—$X_{(1)}$ et $X_{(n)}$: le minimum et le maximum des n valeurs.

Exemple 3.9.2 . Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire simple d'une population de fonction de densité f et de fonction de répartitions F. Quelle est la fonction de densité de $X_{(n)}$?

Solution Désignons $X_{(n)}$ par Y. La fonction de *répartition* de Y est $G(y) = P(Y \leq y)$.

Nous montrons que $G(y) = [F(y)]^n$ et donc que la fonction de densité de Y est $g(y) = nf(y)[F(y)]^{n-1}$.

L'événement $\{Y \leq y\}$ est équivalent à l'événement $\{X_1 \leq y$ et $X_2 \leq y, \ldots,$ et $X_n \leq y\}$. Donc $G(y) = P(X_1 \leq y$ et $X_2 \leq y, \ldots,$ et $X_n \leq y) = P(X_1 \leq y)\times P(X_2 \leq y)\times \ldots\times P(X_n \leq y) = [F(y)]^n$. Donc la fonction de densité de Y est

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}[F(y)]^n = n[F(y)]^{n-1}F'(y) = nf(y)[F(y)]^{n-1}.$$

Exemple 3.9.3 . Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire simple d'une population de fonction de densité f et de fonction de répartitions F. Quelle est la fonction de densité de $X_{(1)}$?

Solution Désignons $X_{(1)}$ par Z. La fonction de *répartition* de Z est

$H(z) = P(Z \leq z) = 1 - P(Z > z) = 1 - P(X_1 > z$ et $X_2 > z, \ldots,$ et $X_n > z)$

$= 1 - P(X_1 > z)\times P(X_2 > z)\times \ldots\times P(X_n > z) = 1 - [1 - F(z)]^n$.

Donc la fonction de densité de Z est $\frac{d}{dz}H(z) = \frac{d}{dy}\left(1-[1-F(y)]^n\right) = nf(z)[1-F(z)]^{n-1}$.

Ces deux exemples sont des cas particuliers du théorème suivant :

Théorème 3.9.1 Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire simple d'une population de fonction de densité f et de fonction de répartitions F.

La fonction de densité de $Y = X_{(r)}$, pour $1 \le r \le n$ est donnée par

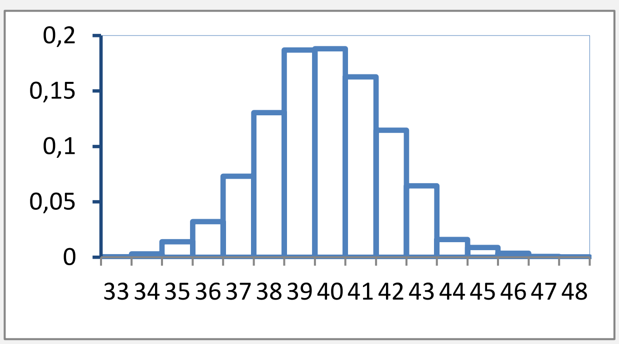
$$g(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y)[F(y)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r} \qquad (3.9.1)$$

3.10 Quelques distributions naturelles

Nous avons justifié (par le théorème limite central) l'emploi de la loi normale pour des moyennes de variables indépendantes— des moyennes qu'on calcule régulièrement dans le cadre d'un sondage. Il suffit donc que nos échantillons ne soient pas trop petits pour n'avoir pas trop d'alarme concernant la normalité ou non de la population. Il reste que la question de savoir quelles variables sont naturellement normales est théoriquement intéressante. Quelles sont les variables, observées dans la nature, dont on peut prévoir qu'elles sont de loi normale ? Nous verrons quelques exemples desquels on pourra tirer quelque leçon. Essentiellement, on peut prévoir qu'une variable est de loi normale si elle est l'effet d'une multitude de facteurs indépendants, et si aucun de ces facteurs ne prédomine. Ainsi donc, on s'attend à ce que les tailles des personnes d'une population homogène soient distribuées normalement parce que les tailles sont déterminées par un grand nombre de facteurs environnementaux et génétiques. Si la population n'est pas homogène — si elle comprend des femmes et des hommes, des adultes et des enfants, des personnes de races différentes — alors on ne peut pas compter sur une distribution normale. Nous verrons, et c'est une conséquence de ces considérations, que les variables observées directement dans la nature — physique ou biologique— ont de fortes chances d'être normales alors que celles issues d'un contexte social ne le sont presque jamais. Voici donc un certain nombre d'exemples.

Exemple 3.10.1 *Tour de poitrine de* 5738 *soldats écossais du* XIX^e^ *siècle.*

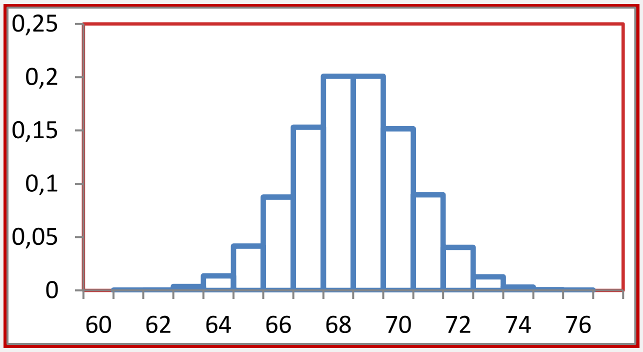
On le voit ici comme dans beaucoup de mesures anthropométriques, la loi normale semble bien s'ajuster aux données.



Données de A. Quetelet, dans « Lettres S.A.R. le Duc Régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la Théorie des Probabilités, Appliquée aux Sciences Morales et Politiques. » (Bruxelles : M. Hayes, 1846) p. 400. Source : Velleman, P. F. and Hoaglin, D. C. (1981). *Applications, Basics, and Computing of Exploratory Data Analysis.* Belmont. CA : Wad sworth, Inc.
Données disponible dans http ://lib.stat.cmu.edu/DASL/Stories/ChestsizesofMilitiamen.html

Exemple 3.10.2 *Tailles (en pouces) de* 25 000 *enfants de Hong Kong***.**

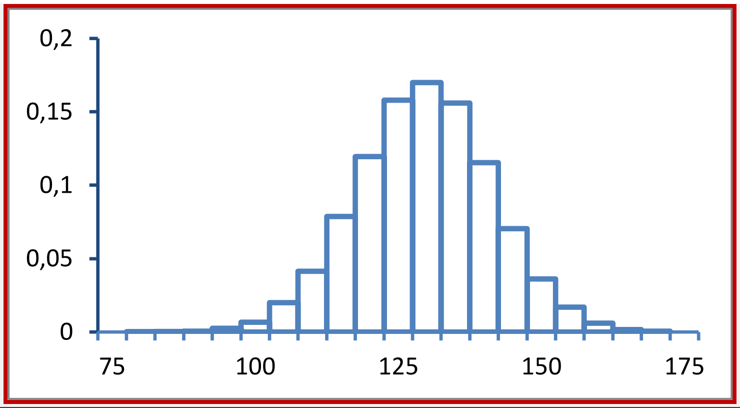
Bien que, généralement, la distribution des tailles des personnes soit à peu près normale, on ne devrait pas s'y attendre ici, car la population est plutôt hétérogène : elle comprend des enfants des deux sexes et d'âges différents. Malgré cela, la distribution empirique ne s'éloigne pas trop d'une distribution normale.



Obtenues lors d'une étude menée en 1993 auprès des maternelles, écoles et centres de santé. Données disponibles dans http ://wiki.stat.ucla.edu/socr/index.php/SOCR_Data_Dinov_020108_HeightsWeights.

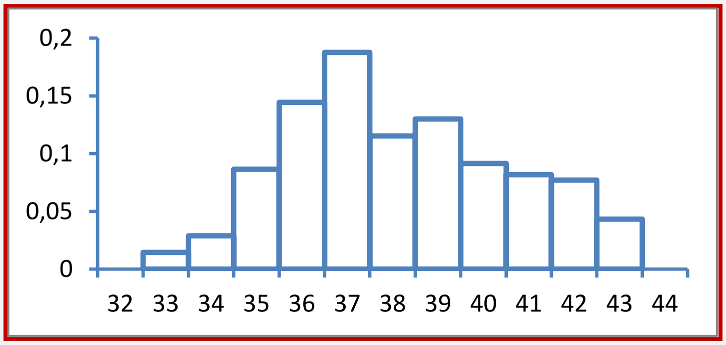
Exemple 3.10.3 *Poids (en livres) des enfants de la population présentée au dernier exemple.*

Ici aussi l'hypothèse de normalité est plausible.



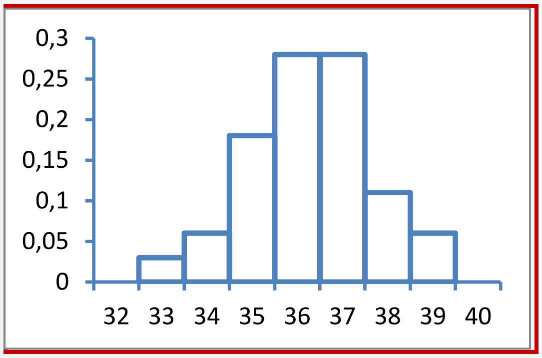
Exemple 3.10.4 *Distribution de la pointure des chaussures au Brésil*

La pointure des chaussures est une variable carrément discrète, mais chacune de ses valeurs correspond à un intervalle de longueurs de pied. La longueur du pied est une variable continue, dite « latente », qui, elle, pourrait bien être normale. Dans ce cas, la distribution ci-dessous serait équivalent au regroupement de valeurs auquel on recourt normalement pour construire un histogramme.

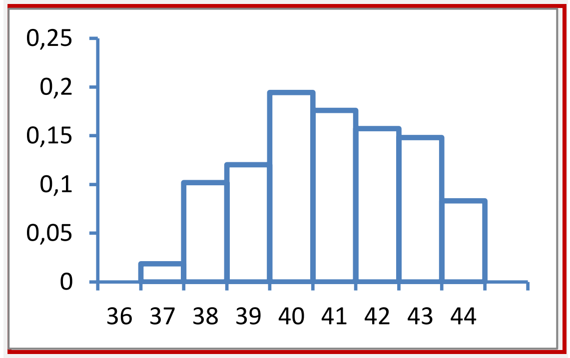


Or la normalité n'est pas évidente ici. Il semblerait même que la distribution soit bimodale (deux sommets). Est-ce dû au fait que l'échantillon comprend des hommes et des femmes ? C'est possible ; donc on considère séparément la distribution pour les femmes et pour les hommes. On constate en effet que les deux distributions sont unimodales, mais elles sont plutôt asymétriques. La distribution pour les hommes, en particulier, surprend un peu par la grande fréquence des hautes pointures.

Femmes

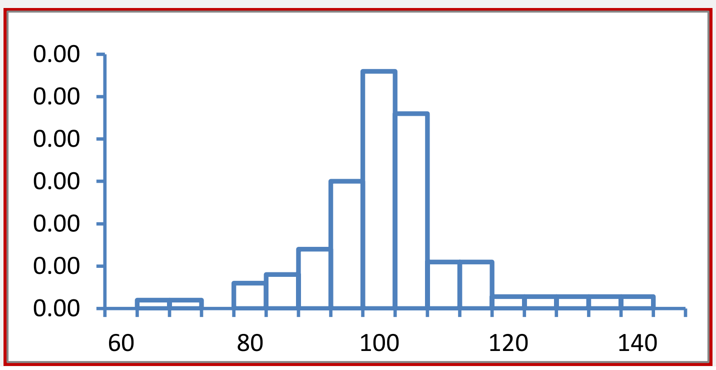


Hommes



Étude effectuée auprès de 5312 Brésiliens en 2004. http ://www.zonalatina.com/Zldata377.htm

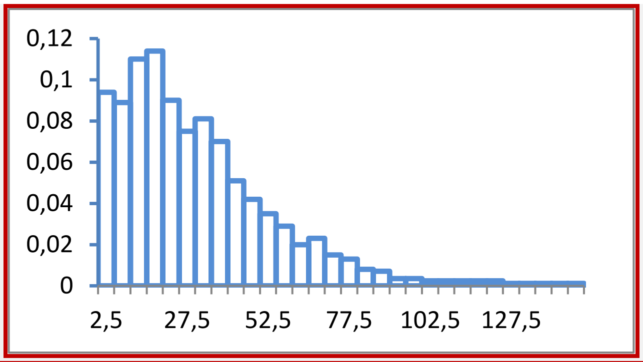
Exemple 3.10.5 *Force de rupture d'un échantillon de fils*.
On s'attendrait ici à une distribution normale, car les mesures issues d'un processus de fabrication le sont souvent. Ce qu'on observe plutôt, c'est une distribution relativement asymétrique, due à quelques données extrêmes qui pourraient être le fait d'un événement épisodique. La présomption de normalité est assez ferme pour faire soupçonner que ces cas extrêmes sont symptomatiques d'un problème technique.



[DASL : http ://lib.stat.cmu.edu/DASL/Stories/distribution.html ; Source : A.J. Duncan, Quality Control and Industrial Statistics, 4th Ed., Richard D. Irwin, 1974, p. 67]

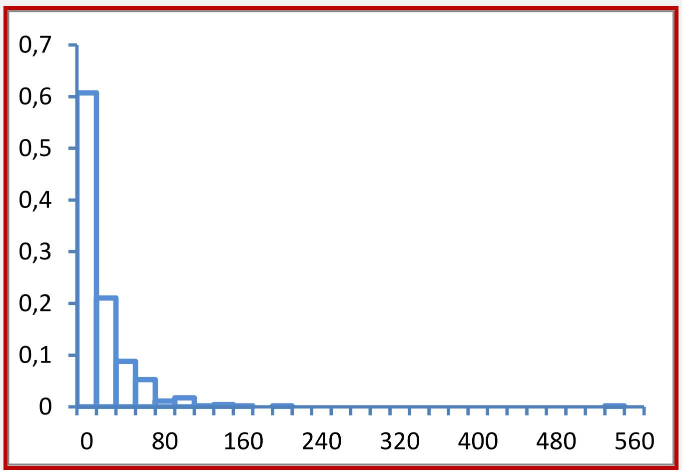
Exemple 3.10.6 *Revenus des Québécois en* 2007

C'était prévisible : les choses se gâtent dès qu'on sort du domaine physique ou biologique. La distribution des revenus ci-dessous est typique : forte concentration à gauche, décroissance de la fréquence sur un long intervalle à droite. C'est caractéristique des distributions de revenus.



Exemple 3.10.7 *Distribution des revenus des PME du Québec (en milliers de dollars)*

On pouvait prévoir l'asymétrie de cette distribution, bien que le grand nombre de PME avec des revenus très faibles surprend un peu. En particulier quand on voit (dans l'exemple 3.8.7) que la plupart d'entre elles ont 40 employés ou plus.



http ://www.les affaires.com/classements/500-quebec-2010

3.11 Quelques démonstrations

La fonction de densité normale

On montre que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x-\mu)^2/\sigma^2}$ est bien une fonction de densité. Il est évident que $f(x) > 0\ \forall x$. Il reste à démontrer que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Nous commençons par une variable normale centrée-réduite Z dont la fonction de densité est $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$. Nous montrons que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \left(\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz\right)^2 = \dfrac{\pi}{2}$. Nous allons donc montrer que $\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz\right)^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Or l'intégrale $L^2 = \left(\int_0^\infty e^{-z^2/2}dz\right)^2$ peut s'exprimer comme une intégrale double :

$$L^2 = \left(\int_0^\infty e^{-z^2/2}dz\right)^2 = \int_0^\infty e^{-u^2/2}du \int_0^\infty e^{-v^2/2}dv = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)/2}dudv$$

En faisant la transformation $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$, nous obtenons

$$L^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2/2}rdrd\theta$$

r étant le Jacobien de la transformation. Lorsqu'on intègre par rapport à θ, on obtient

$$L^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2/2}rdr$$

En faisant la transformation $s = r^2/2$, nous obtenons $L^2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-s}ds$.

On a donc $L^2 = \frac{\pi}{2}$ car $\int_0^\infty e^{-s}ds = 1$.

Dans le cas général, on évalue l'intégrale de la fonction de densité, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx$, à l'aide de la transformation $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$. On a alors $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 1$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème 3.4.2

À montrer que si $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2)$ et $Y = a + bX$, alors $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu\,;b^2\sigma^2)$

Supposons que $b > 0$. La fonction de répartition de Y est $G(y) = P(Y \le y) = P(X \le (y-a)/b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{(y-a)/b} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx$. Effectuant la transformation $u = a + bx$. On a alors

$$G(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{(y-a)/b} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}((u-a)/b-\mu)^2}\frac{1}{b}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b\sigma}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2(b\sigma)^2}[u-(a+b\mu)]^2}du.$$

On reconnaît cette expression comme la fonction de répartition d'une variable de loi $\mathcal{N}(a+b\mu\,;b^2\sigma^2)$, ce qui démontre le théorème.

La démonstration du théorème 3.5.1 exige une connaissance des fonctions génératrices des moments et ne sera pas traitée ici.

La loi khi-deux

Soit $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$, $x > 0$, la fonction de densité d'une variable de loi Gamma de paramètres α et β.

Pour montrer que

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = \Gamma(\alpha),$$

il suffit d'effectuer la transformation $x = \beta y$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha}(\beta y)^{\alpha-1}e^{-y}\beta dy = \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy = \Gamma(\alpha)$$

On écrit $X \sim \mathcal{Gm}(\alpha\,;\beta)$ pour signifier que X suit une loi gamma de paramètre α et β.

Nous utiliserons les propriétés suivantes de la fonction gamma :

1) Lorsque $\alpha = 1$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(1) = 1$.

2) Si $\alpha > 1$, on obtient en intégrant par parties la formule
$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$
Lorsque $\alpha = n$, un entier positif, on obtient
$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

3) On peut aussi vérifier que
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Théorème 3.8.2

Si $X \sim \mathcal{Gm}(\alpha\,;\,\beta)$, alors $E(X) = \alpha\beta$ et $Var(X) = \alpha\beta^2$.

Le dernier résultat montre que $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = \beta^\alpha\Gamma(\alpha)$.

Donc $E(X) = \int_0^\infty x\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{(\alpha+1)-1}e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\beta^{(\alpha+1)}\Gamma(\alpha+1) = \alpha\beta$.

$E(X^2) = \int_0^\infty x^2\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{(\alpha+2)-1}e^{-x/\beta}dx = \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\beta^{(\alpha+2)}\Gamma(\alpha+2) = \alpha(\alpha+1)\beta^2$.

De là il vient que $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2$.

Loi khi-deux

La loi χ_k^2 est un cas particulier de la loi gamma, avec $\beta = 2$ et $\alpha = k/2$, où k, le nombre de degrés de liberté, est un entier positif.

Théorème 3.8.2

À montrer : si $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$, alors $Y = X^2 \sim \chi_1^2$.

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0\,;\,1)$ et $Y = Z^2$. La fonction de répartition de Y est, pour $y > 0$,

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Z^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) = P(Z \le \sqrt{y}) - P(Z \le -\sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})$,
où Φ est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0\,;\,1)$.

La fonction de densité est donc
$$f_Y(y) = \Phi(\sqrt{y})\,\frac{d}{dy}\sqrt{y} - \Phi(-\sqrt{y})\,\frac{d}{dy}(-\sqrt{y})$$
où
$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}.$$

Donc $f_Y(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}y^{-1/2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}(-y^{-1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/2}y^{-1/2}$.

Puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, la fonction de densité peut s'écrire comme $f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(1/2)\sqrt{2}}y^{-1/2}e^{-y/2}$.

Cette expression est celle de la fonction de densité d'une variable de loi χ_1^2.

Plus généralement, une variable χ_n^2 est une somme de carrés de n variables aléatoires $\mathcal{N}(0 ; 1)$ indépendantes. Ceci découle du théorème suivant, `corollaire des théorèmes 3.8.1 et 3.8.2,

Théorème

Soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, $X_i \sim \chi^2_{\nu_i}$. Alors la somme

$$X = X_1 + \ldots + X_n \sim \chi^2_\nu$$

où $\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$.

L'énoncé suivant est un corollaire :

Corollaire

Soit $Z_1, \ldots, Z_n$, n variables aléatoires indépendantes, chacune de loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$ et soit $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$. Alors $X \sim \chi_n^2$. ■

Théorème 3.9.1

$g(y) = \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\mathrm{P}(y \le X_{(r)} \le y+\delta)}{\delta}$. Or l'événement $\{y \le X_{(r)} \le y + \delta\}$ signifie qu'une des observations prend une valeur t dans l'intervalle $[y ; y + \delta]$, r-1 autres se situent à gauche de t et n-r autres enfin se situent à droite de t. Le nombre de façons de choisir la variable qui prend la valeur t, les r-1 variables qui prennent une valeur inférieure à t et les n-r variables qui prennent une valeur supérieure à t est $\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$. La probabilité $\mathrm{P}(y \le X_{(r)} \le y+\delta)$ ne dépend pas du choix. Donc, prenant un choix particulier, nous avons

$$\mathrm{P}(y \le X_{(r)} \le y+\delta) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\mathrm{P}(X_1 \le X_{(r)},\ldots, X_{r-1} \le X_{(r)}, y \le X_r \le y+\delta, X_{r+1} \ge X_{(r)},\ldots, X_n \ge X_{(r)})$$

$$g(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{P}(X_1 \le X_{(r)},\ldots, X_{r-1} \le X_{(r)}, y \le X_r \le y+\delta, X_{r+1} \ge X_{(r)},\ldots, X_n \ge X_{(r)})}{\delta}.$$

Soit $\mathrm{B}(\delta) = \mathrm{P}(X_1 \le X_{(r)},\ldots, X_{r-1} \le X_{(r)}, y \le X_r \le y+\delta, X_{r+1} \ge X_{(r)},\ldots, X_n \ge X_{(n)})$.

$$\mathrm{P}(X_1 \le y,\ldots, X_{(r-1)} \le y, y \le X_r \le y+\delta, X_{(r+1)} \ge y+\delta,\ldots, X_{(n)} \ge y+\delta)$$

$$\le \mathrm{B}(\delta) \le \mathrm{P}(X_1 \le y+\delta,\ldots, X_{(r-1)} \le y+\delta, y \le X_r \le y+\delta, X_{(r+1)} \ge y,\ldots, X_{(n)} \ge y)$$

$$[F(y)]^{r-1}\mathrm{P}(y \le X_r \le y+\delta)[(1-F(y+\delta)]^{n-r} \le \mathrm{B}(\delta) \le [F(y+\delta)]^{r-1}P(y \le X_r \le y+\delta)[1-F(y)]^{n-r}$$

Donc

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\lim_{\delta\to 0}\frac{[F(y)]^{r-1}\mathrm{P}(y \le X_r \le y+\delta)[(1-F(y+\delta)]^{n-r}}{\delta}$$

$$\le g(y) \le \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\lim_{\delta\to 0}\frac{[F(y+\delta)]^{r-1}P(y \le X_r \le y+\delta)[1-F(y)]^{n-r}}{\delta}$$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y)]^{r-1}\lim_{\delta\to 0}[(1-F(y+\delta)]^{n-r}\lim_{\delta\to 0}\frac{\mathrm{P}(y \le X_r \le y+\delta)}{\delta}$$

$$\le g(y) \le \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[1-F(y)]^{n-r}\lim_{\delta\to 0}[F(y+\delta)]^{r-1}\lim_{\delta\to 0}\frac{P(y \le X_r \le y+\delta)}{\delta}$$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y)]^{r-1}[(1-F(y)]^{n-r}f(y) \le g(y) \le \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[1-F(y)]^{n-r}[F(y)]^{r-1}f(y)$$

Donc $g(y) = \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y)[F(y)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r}$.

RÉSUMÉ

1 La *fonction de densité* d'une variable aléatoire continue X est une fonction une fonction f telle que pour $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, où F est la fonction de répartition de X. Donc $f(x) = F'(x)$ et $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

2 *Lois continues*

Distribution	*Modalités de X*	*Fonctions de densité et de répartition*	E(X)	Var(X)	$M_X(t)$
Uniforme $\mathcal{U}(\alpha; \beta)$	$x \in [\alpha; \beta]$	$f(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$ $F(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$	$(\alpha+\beta)/2$	$(\beta-\alpha)^2/12$	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t(\beta-\alpha)}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\beta)$	$x \in [0; \infty)$	$f(x) = \frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}$ $F(x) = 1-e^{-x/\beta}$	β	β^2	$(1-\beta t)^{-1}$
Loi gamma $\mathcal{G}m(\alpha ; \beta)$	$x \in [0; \infty)$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$
Loi khi-Deux χ^2_ν	$x \in [0; \infty)$	$\frac{1}{\Gamma(\nu/2)2^{\nu/2}}x^{\nu/2-1}e^{-x/2}$	ν	$2\nu^2$	$(1-2t)^{-\nu/2}$
Normale $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$	$x \in (-\infty; \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}$

4 *Une fonction linéaire d'une normale est normale*
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ et $Y = a + bX$ alors $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu ; b^2\sigma^2)$.

5 *La cote Z d'une normale est une normale centrée*-réduite : $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0 ; 1)$.

6 *Toute fonction linéaire de normales indépendantes est normale*
Si les variables $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i;\sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, sont indépendantes et $a_1, \ldots, a_n$ des constantes, alors $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $\sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_i\mu_i ; \sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2\right)$.

7 *Somme et moyenne de normales identiquement distribuées*.
Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes, toutes de même loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$, alors $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu ; n\sigma^2)$ et $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu ; \sigma^2/n)$.

8 *Théorème limite central*.
Soit $X_1, X_2, \ldots$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de moyenne μ et de variance σ^2. Alors la variable $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ tend en loi vers une normale centrée-réduite lorsque n tend vers l'infini.

9 *Approximation de la loi binomiale par la loi normale*
Soit $X \sim \mathcal{N}(n\ ;\ p)$ et supposons que $n \geq 30$, $np > 5$, et $nq > 5$. Alors, il est approximativement vrai que $\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, ou encore, que $X \sim \mathcal{N}(np\ ;\ npq)$.

10 *Loi Gamma*, désignée par $\mathcal{Gm}(\alpha\ ;\ \beta)$ est une loi à deux paramètres, α et β. L'espérance d'une variable X de loi $\mathcal{Gm}(\alpha\ ;\ \beta)$ est $E(X) = \alpha\beta$ est sa variance est $Var(X) = \alpha\beta^2$,

11 Une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi Gamma est une variable de loi Gamma: $X_i \sim \mathcal{Gm}(\alpha_i\ ;\ \beta) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{Gm}(\sum \alpha_i ; \beta)$.

12 *La loi exponentielle* La loi exponentielle de paramètre β est une loi $\mathcal{Gm}(1\ ;\ \beta)$. Son espérance est β et sa variance β^2.

13 Une somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre β est une variable de loi Gamma: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{Gm}(n\ ;\ \beta)$.

14 *Loi khi-deux*
La loi khi-deux est une loi gamma avec $\beta = 2$ et $\alpha = \nu/2$, ν étant un entier positif appelé *nombre de degrés de liberté*.

15 *Espérance et variance d'une khi-deux*
Si $X \sim \chi^2_\nu$, $E(X) = \nu$ et $Var(X) = 2\nu$.

16 *Le carré d'une normale centrée-réduite est une* χ^2_1 .

La somme des carrés de n normales centrées-réduites est une χ^2_n .